

Minus drei Kühe

Braucht die Natur negative Zahlen?



Flasche minus Seite = Fläche?

Die Kleinsche Flasche ist ein Beispiel einer nicht-orientierbaren Fläche. Umgangssprachlich formuliert hat sie die Eigenschaft, dass innen und außen nicht unterschieden werden können, oder anders formuliert, dass sie wie das Möbiusband nur eine einzige Seite besitzt, die gleichzeitig innen und außen ist.

Prolog

Ein **Theologe**, ein **Physiker** und ein **Mathematiker** stehen vor einem leeren Raum. Sie sehen, dass drei Personen in diesen leeren Raum gehen, und kurz darauf fünf Personen den Raum verlassen.

„Ein Wunder“, ruft der Theologe!

„Das muss ein Meßfehler sein“, brummt der Physiker!

„Aha, jetzt müssen zwei Personen in diesen Raum gehen, damit er wieder leer ist“, konstatiert der Mathematiker!

Der Mathematiker hat also kein Problem mit dieser absurden Situation und konstatiert einfach den Bedarf an negativen Zahlen. Um dieses Beispiel zu Ende zu bringen, konstatieren wir, dass Mathematiker sich auch mit Räumen beschäftigen, und dass in Räumen seltsames geschieht.

Bei allem Schmunzeln darüber sollte man aber nicht auf den Gedanken kommen, dass Mathematiker in ihrem wissenschaftlichen Elfenbeinturm bei all den abstrakten Aufgabenstellungen den Blick auf die **Realität** verloren haben. Sie haben ganz einfach neben der nüchternen **Logik** auch viel **Phantasie**, wie ein berühmter Mathematiker einmal feststellte, als er nach dem Verbleib eines seiner Schüler gefragt wurde:

„Ach der, der ist Schriftsteller geworden, für Mathematik hatte er zuwenig Phantasie!“

Von einigen Mathematikern ist allerdings überliefert, dass sie irgendwie anders waren. **Paul Dirac** war vermutlich Autist, **Erich Gödel** litt unter Vergiftungswahn - er verhungerte, als seine Frau mit Schlaganfall im Krankenhaus lag, und **Alan Turing** war ein empathieloses Ekel - auf Wunsch seiner Assistentin versuchte er nur einmal, sein Team in Bletchley Park mit einem für ihn typischen Witz aufzuheitern:

Zwei Männer treffen im Wald auf einen wilden Bären. Der eine bückt sich und knüpft seine Schubänder fester. Der zweite fragt: „Glaubst du, du kannst schneller rennen als der Bär?“. – „Das muss ich nicht, ich muss nur schneller sein als du!“.

Phantasie

Der Legende nach störte der junge Carl Friedrich Gauß den Unterricht mit lästigen Fragen, und sollte zur Strafe alle Zahlen von 1 bis 100 zusammenzählen. Bevor der Lehrer noch mit dem Unterricht fortfahren konnte, präsentierte Gauß die Lösung: Er hatte erkannt, dass die Zahlen paarweise 101 ergaben, also 1+100, 2+99, 3+98 usw. und daher das **Produkt 50*101** ergaben. Das war geniale Spontanität. Um diesen Vorgang als **Gauß'sche Summenformel** darzulegen, braucht man allerdings ein wenig Phantasie bei der Verschiebung der Indizes:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1}^n k &= \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n (n+1-k) \\ &= \sum_{k=1}^n (k+n+1-k) = \sum_{k=1}^n (n+1) \\ &= n(n+1). \end{aligned}$$

Arithmetische Summenformel

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Viel Phantasie hatte jedenfalls der englische Mathematiker Paul Dirac 1928, als er das Ergebnis seiner **relativistischen Wellengleichung** (einer Weiterentwicklung der Schrödinger-Gleichung) betrachtete. Aus Symmetriegründen enthielt die Lösung auch negative Ergebnisse - so wie jede Quadratwurzel ein positives und ein negatives Ergebnis hat. Anstatt die negativen Ergebnisse zu verwerfen, stellte er die „Schönheit der Mathematik“ über die Realität - und erfand die **Antimaterie**, um die Realität an seine Gleichung anzupassen.

$$i \sum_{\mu=0}^3 \gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + m$$

Bevor die Physiker über seine absurde Phantasie schmunzeln konnten, geschah etwas unerwartetes: Carl Anderson fand 1932 in der Höhenstrahlung das **Positron** - also das Antiteilchen des Elektrons.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & & \\ & & 1 & \\ -1 & & & \end{pmatrix},$$

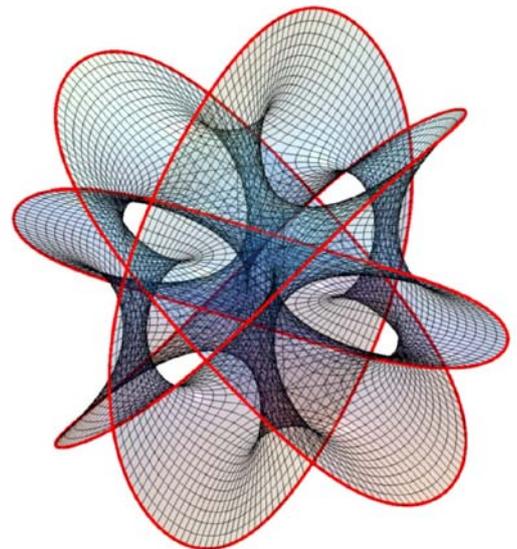
Dirac erhielt 1933 gemeinsam mit Erwin Schrödinger den Nobelpreis für Physik.

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} & & -i & \\ & i & & \\ & & & \\ -i & & & \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & & \\ -1 & & & \\ & & 1 & \end{pmatrix}.$$

Viel Phantasie braucht man auch für die eingangs erwähnten Räume, an denen Mathematiker und auch Physiker Gefallen gefunden haben. Zum Beispiel die **Calaby-Yau-Mannigfaltigkeiten**, laut Wikipedia-Definition:

Eine Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit (oder ein Calabi-Yau-Raum) ist eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit mit verschwindender erster Chern-Klasse und Ricci-flacher Metrik.

This image gives an impression of the real 6D manifold known in string theory as the Calabi-Yau quintic. This manifold is a popular candidate for the wrapped-up 6 hidden dimensions of 10-dimensional string theory at the scale of the Planck length.

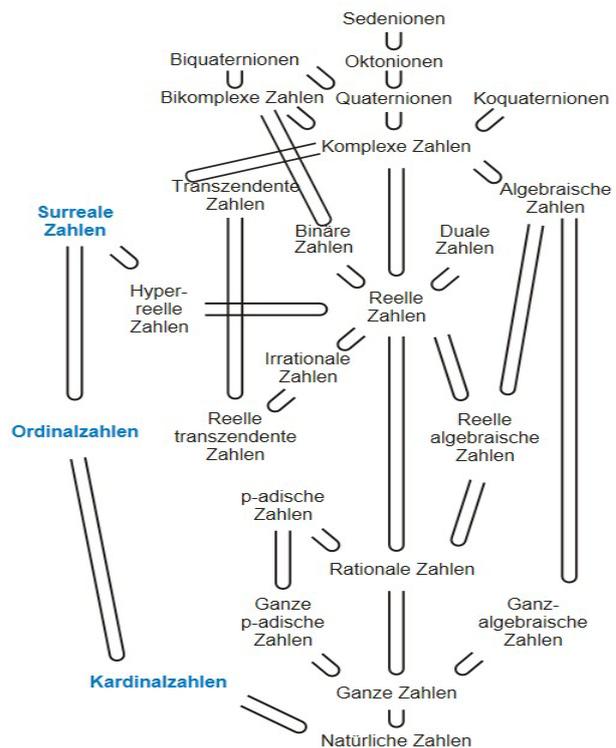
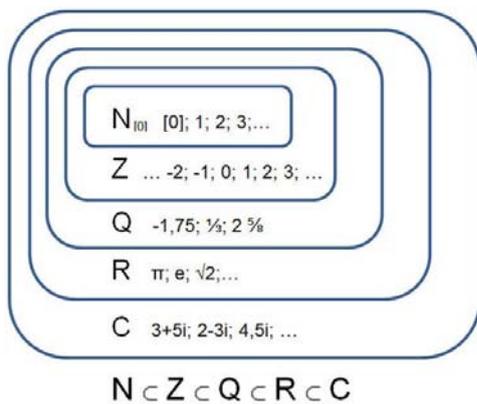


Man sollte nun meinen, dass bereits die staubtrockene Begriffsdefinition die Calaby-Yaus weit über unseren Verständnishorizont hinauskatapultiert, das eigentliche Unvorstellbare liegt aber in der topologischen Vielfalt der Calaby-Yaus: Nicht nur die ineinander verflochtenen Räume, sondern auch die darin enthaltenen Löcher haben maßgebliche Strukturen!

Die begnadete Erzählerin Lisa Randall, die populäre Nachfolgerin von Stephen Hawking, spricht in diesem Zusammenhang von „komplizierten Details“, der String-Theoretiker Brian Greene deutet vage „unendlich viele Möglichkeiten“ an, und der Sachbuchautor Claus Kiefer präzisiert diese Möglichkeiten mit etwa **10⁵⁰⁰**.

Man braucht also wirklich viel Phantasie, ungefähr 10⁵⁰⁰ Phantasie!

Mathematik und Zahlen allgemein



Negative Zahlen

Sind negative Zahlen nur eine pragmatische Erweiterung des Zahlensystems, oder gibt es in der Natur tatsächlich einen Bedarf dafür?

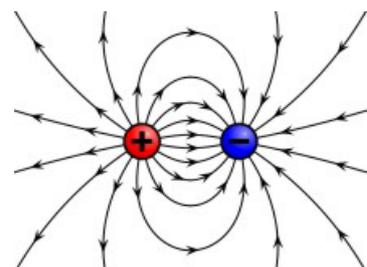
Um es konkret zu formulieren: Müssen alle intelligente Zivilisationen im Universum, so es sie überhaupt gibt, zwangsweise zu der Einsicht gelangen, dass negative Zahlen zum Verständnis der Naturgesetze erforderlich sind?

- Die Celsius-Temperaturskala zum Beispiel richtet sich nach dem Gefrierpunkt des Wassers, man kann sie aber auch elegant in Kelvin angeben;
- Gerichtete Größen wie die Kraftwirkung, Gravitation oder Feldstärke sind eine Frage der Sichtweise,
- und die zunehmend negativen Bilanzen der Wirtschaftswelt sind nicht Gegenstand der Betrachtung - dort sollte der einzige Realitätsbezug die schlaflosen Nächte der Akteure sein.

Elektrische Ladung - positiv und negativ?

Die elektrische Ladung ist eine physikalische Größe, die mit der Materie verbunden ist, wie z. B. auch die Masse. Die Ladung freier Teilchen ist stets ein ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung e - eine Naturkonstante mit dem Wert $1,602\ 176\ 6208$ Coulomb (=Amperesekunde).

Die Ladung des Elektrons ist negativ, die des Protons positiv. Bei zusammengesetzten Teilchen, wie Atomen, addieren sich die einzelnen Ladungen. Ist die Gesamtladung null, so ist das zusammengesetzte Teilchen neutral.



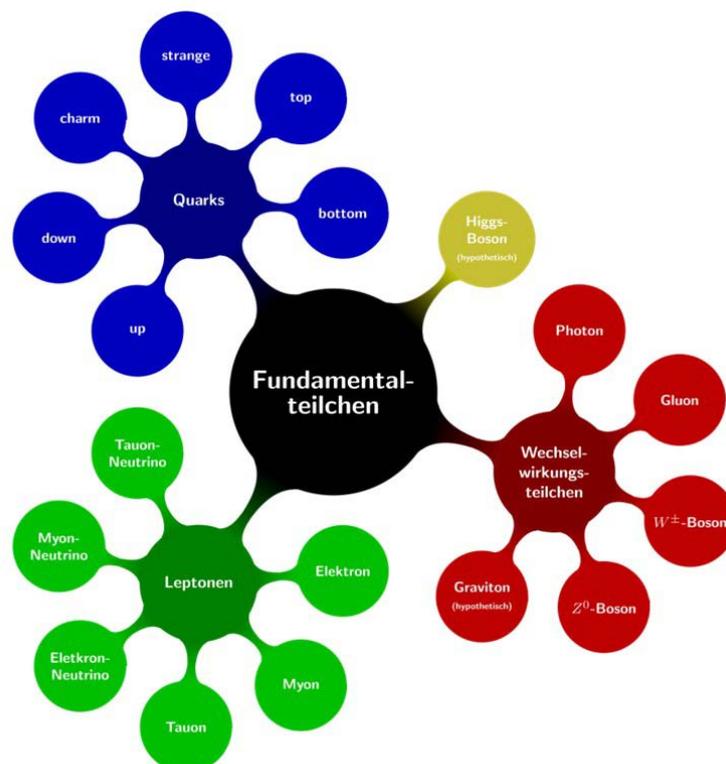
Das tieferliegende Wesen der elektrischen Ladung - und auch der Masse - erschließt sich mit diesen Aussagen allerdings nicht. Das **Standardmodell der Teilchenphysik** macht z. B. keinerlei Aussagen über die Teilchenmasse. Dazu ist eine eigene Hypothese erforderlich, nämlich das sogenannte **Higgs-Feld**: Erst durch Wechselwirkung mit dem allgegenwärtigen Higgs-Feld (also einer Äthertheorie im neuen Kleid) erhalten die Teilchen ihre charakteristische Masse.

Auch für die elektrische Ladung bleibt kein Platz in der Theorie, und dies im sprichwörtlichen Sinn! Aus mathematisch-physikalischen Zwängen werden **Elementarteilchen** als punktförmig angenommen. Und in einem punktförmigen Teilchen ohne Ausdehnung ist kein Platz für Masse oder Ladung.

WIKI: Elementarteilchen

Die Elementarteilchen sind klein in dem Sinne, dass man keinerlei Anhaltspunkte für einen von Null verschiedenen Durchmesser hat. Theoretisch werden sie daher als punktförmig angenommen. Weiter sind sie klein in dem Sinne, dass sie nach heutigem Wissensstand nicht aus noch kleineren Untereinheiten zusammengesetzt sind. Drittens sind sie klein in dem Sinne, dass selbst ein kleines Objekt bereits Trilliarden (10^{21}) dieser Teilchen enthält. Zwei Beispiele: Ein Stecknadelkopf besteht aus größenordnungsmäßig 10^{22} Elektronen und 10^{23} Quarks. Wenn ein Teelicht leuchtet, entstehen in der Flamme jede Sekunde etwa 10^{20} Photonen.

Dies betrifft allerdings nur die elementaren, strukturlosen **Leptonen** (von griechisch λεπτός leptós: dünn, klein), also die Teilchenfamilie, zu der Elektron, Myon und Tau-Teilchen gehören. Die schweren **Hadronen** (von griechisch ἄδρός hadrós: dick, stark), also die Teilchenfamilie, zu der das Proton und das Neutron gehören, besitzen eine experimentell nachgewiesene innere Struktur und somit Platz und auch Bedarf für ein weiterführendes Teilchenkonzept. Doch das Innere eines Hadrons ist definitiv nicht sichtbar und messbar, also musste man sich etwas Neues ausdenken - entweder durch eine mathematische Theorie, oder durch ein phänomenologisches Modell. Die „Modellbauer“ setzten sich in diesem Fall durch und schufen das **Quark-Modell** (später kamen die Theoretiker zum Zug und schufen dazu passend auch eine **String-Theorie**).

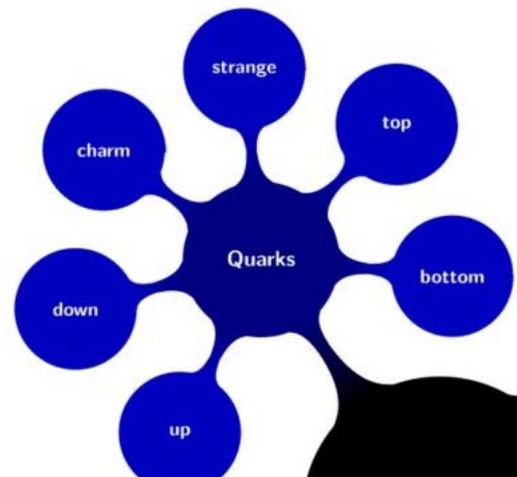


Damit sind wir bei einem tieferliegenden Problem: die schweren Hadronen (es gibt auch mittlere Hadronen, die Mesonen) setzen sich aus jeweils drei Quarks und somit aus Drittel-Ladungen zusammen:

- **das Proton** aus zwei up-Quarks mit zweimal $+2/3$ Ladung und einem down-Quark mit $-1/3$, in Summe $+1$
- **das Neutron** aus zwei down-Quarks mit zweimal $-1/3$ Ladung und einem up-Quark mit $+2/3$, in Summe 0

Sollte daher bis jetzt die Frage offen gewesen sein, ob die „willkürliche“ Namensgebung der elektrischen Ladungen $+/-$ überhaupt einen Realitätsbezug gehabt hat, so ist nun klar:

Minus $1/3$ von „Irgendwas“ summiert sich mit „Irgendwas“ je nach Situation zu 0 oder 1 .



Ob wir jemals ein $-1/3$, also ein down-Quark, in der Natur beobachten können, ist fraglich. Denn das strikte „**Confinement**“ des Quark-Modells verbietet das isolierte Auftreten einzelner Quarks.

Und auch das „Irgendwas“, also die elektrische Ladung, bleibt bis auf weiteres ein Mysterium. Elektrische Ladungen dürfen im Universum nur paarweise erzeugt oder vernichtet werden (Gesetz der Ladungserhaltung), was eine tiefe Symmetrie zum Magnetismus aufzeigt, wo Magnetpole ebenfalls nur paarweise (Nord, Süd) existieren. Trotzdem können Ladungen, z. B. in Elektronen und Protonen, getrennt auftreten, während man magnetische Mono-Pole vergeblich sucht. Die „Quantisierung“ der elektrischen Ladung und die fehlenden magnetischen Monopole gehören nach Meinung namhafter Wissenschaftler zu den größten Geheimnissen der Physik.

Antimaterie – negative Energie?

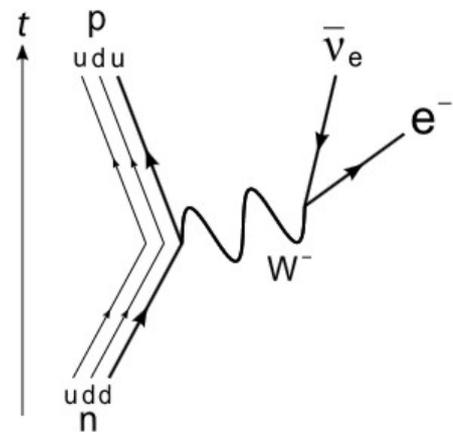
Ist Antimaterie ein potentieller Kandidat für negative Zahlen? Dirac bezeichnete Antimaterie ursprünglich als „**See negativer Energie**“. Heute hat man sich auf die Sichtweise geeinigt, dass Antimaterie ein Spiegelbild normaler Materie ist, also mit **positiver** Masse, aber mit invertierter Ladung, spiegelverkehrten Raumkoordinaten und inverser Zeitrichtung. Ein Positron ist demnach ein Elektron mit positiver Ladung, das sich in einem gespiegelten Raum rückwärts in der Zeit bewegt.

Beim Zusammentreffen mit normaler Materie vernichtet sich Antimaterie zu **positiver Energie**, zum Beispiel zu Photonen. Und aus dieser positiven Energie kann wieder normale Materie entstehen, zum Beispiel ein Elektron-Positron Paar, wie die nachfolgende Blasenkammer-Aufnahme zeigt (Elektron linke Spirale, Positron rechte Spirale, in einem Magnetfeld).



Wo gibt es eigentlich Antimaterie? Nun, zum Einen ist Antimaterie gemeinsam mit Materie beim **Big-Bang**, also dem Beginn des Universums entstanden - warum das Universum nun überwiegend aus Materie besteht, ist eine eigene Geschichte. Zum Anderen entsteht Antimaterie laufend bei Teilchenkollisionen und spontanen Zerfällen schwerer Teilchen, vernichtet sich aber unmittelbar darauf wieder durch Kontakt mit normaler Materie. Eine Speicherung von Antimaterie für eine spätere Nutzung ist praktisch unmöglich.

Ein freies Neutron z. B. zerfällt nach ca. 15 Minuten in ein Proton und ein Elektron, und in ein **Anti-Neutrino**. Damit ist sowohl die **Ladungserhaltung** gewährleistet - Plus und Minus heben sich auf - wie auch die **Familienerhaltung** - ein Hadron wandelt sich in ein anderes um, und das entstehende Lepton wird durch ein Anti-Lepton kompensiert. Das ist die „laienhafte“ Darstellung! Nach der gängigen **elektroschwachen Theorie** ist noch ein sogenanntes „intermediäres Vektorboson“, das W^- beteiligt. Irgendwie eine unheilvolle Botschaft, die andeutet, dass durch den Fortschritt der Wissenschaft das Verständnis der Natur nicht einfacher werden wird.



Das **Proton** ist vor so einem Zerfall geschützt. Sollte es trotzdem zerfallen, müsste es in ein instabiles Hadron und ein Anti-Lepton zerfallen. Es würden also mit der Zeit alle Hadronen verschwinden, und alle Leptonen vernichtet - ein **Endzeit-Szenario** par excellence.

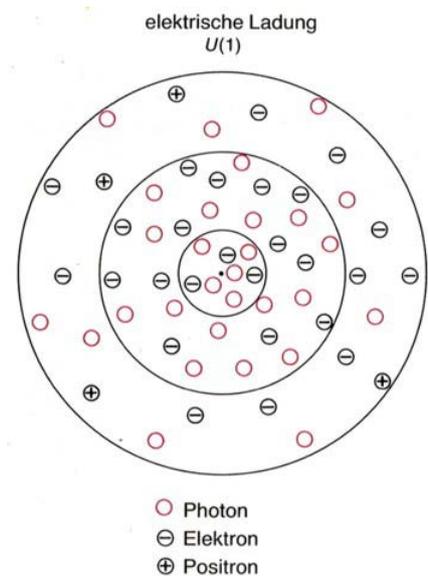
Quantenfluktuationen – Energie aus dem Nichts?

Dank Heisenberg unterliegt auch das **Produkt aus Zeit mal Energie** der Unschärferelation - die Natur kann sich also vom Universum Energie borgen! Zumindest für Nanosekunden können im Vakuum durch sogenannte Quantenfluktuationen **virtuelle Teilchen** entstehen, also aus dem Nichts mit geborgter Energie, die allerdings wieder zurückgegeben werden muss.

Im nebenstehenden Bild ist ein punktförmiges Proton gezeichnet, umgeben von einem Schwarm virtueller Teilchen, also spontan entstehenden Photonen, Elektronen und Positronen.

Ob diese geborgte Energie im „Nichts“ als **negative Energie** bilanziert wird, ist eine philosophische Frage. Im realen Universum summieren sich aber diese geborgten Beträge über alle Grenzen, da Quantenfluktuation überall und jederzeit passieren, und damit jede konservative Theorie zum Einsturz bringen.

Im Zuge neuer kosmologischer Erkenntnisse wurde auch versucht, die Vakuumsenergie zu berechnen, und ob sie für die „**dunkle Energie**“ verantwortlich sei. Das Ergebnis lag um den Faktor 10^{120} zu hoch. Was immer sich im Vakuum, also dem Nichts, verbirgt, sei es eine negative Energiebilanz oder ein unermessliches Guthaben, es könnte zu Instabilität neigen - wiederum ein **Endzeit-Szenario** par excellence.



Die Zahl Null

Ist die Zahl Null erforderlich? Wenn etwas nicht vorhanden ist, so braucht man es auch nicht zählen. Ein Bier mit null Promille hat nicht null Promille, sondern ist kein Bier! Und wenn eine Summation Null ergibt, so ist es eben eine mathematische Summe, und keine reale Eigenschaft.

In einem neutralen Atom zum Beispiel kompensieren sich die **elektrischen Ladungen** zur Summe Null, detto die **Quarkladungen** in einem Neutron. Das Ergebnis ist ein **neutrales Verhalten**, das aus der Summe von Eigenschaften resultiert.

Gibt es reale Eigenschaften, die Null sein können? Oder gefinkelt gefragt: Gibt es physikalische Größen, die als maßgeblicher Nenner in einer uneingeschränkt gültigen Gleichung aufscheinen und eine Division durch Null verursachen dürfen?

Zuallererst findet man natürlich immer einige lästige Kandidaten, die man wegdiskutieren muss, da entweder die rein mathematische Relevanz dominiert, oder natürliche Alternativen anwendbar sind, z. B.:

- **Winkelfunktionen** kann man von 1 bis 360 Grad zählen, die Null ist zwar gängig, aber redundant
- der **Schalldruckpegel** von 0 dB (Hörschwelle) entspricht 20 μPa
- das Photon hat die **Ruhemasse** 0, unterliegt aber wegen seiner kinetischen Energie ($e = mc^2$) wie Materie der Gravitation
- die **Exponentialdarstellung** definiert explizit jedes Hoch-Null mit 1
- Auch Null zur Fakultät, also **0!** ist mit 1 definiert
- der **Logarithmus** von Null ist nicht erwünscht, genauso wie eine **Division** durch Null

Um diese Liste nicht endlos fortzusetzen, sei ein Blick auf grundlegende Eigenschaften gestattet:

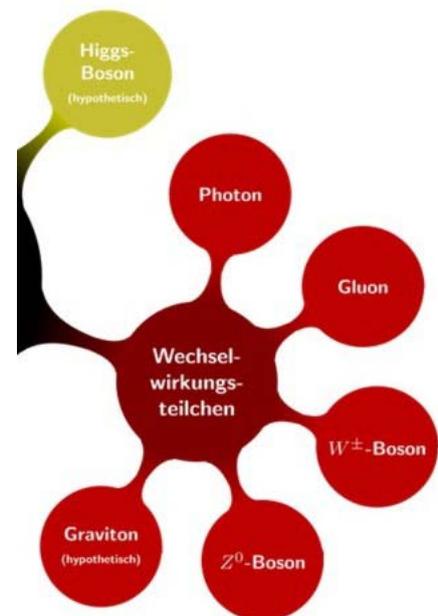
Bosonen - die kräfteübertragenden Botenteilchen

Bosonen vermitteln die Kräfte, die zwischen Materiebauteilen, also Fermionen, wirken:

- Das **Graviton** vermittelt die Gravitationskräfte zwischen Massen
- Das **Photon** vermittelt die elektromagnetische Kraft zwischen geladenen Teilchen
- Das **Gluon** vermittelt die starke Wechselwirkung zwischen Quarks

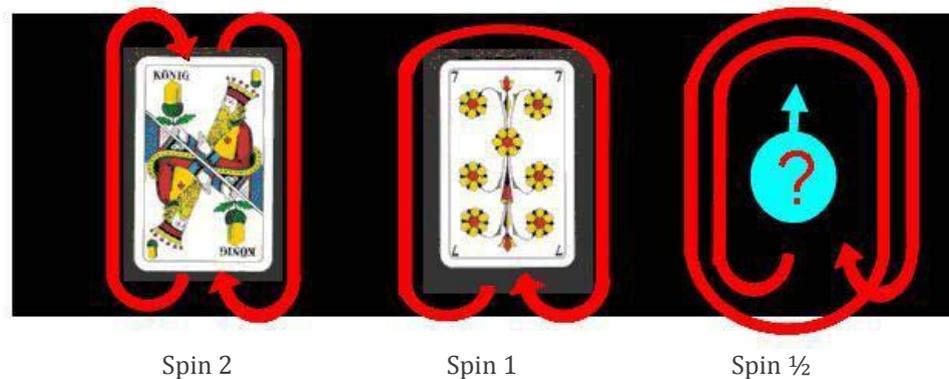
All diese Bosonen haben keine elektrische Ladung. Fehlt diese Eigenschaft - oder ist sie Null? Die letzte, noch fehlende, schwache Wechselwirkung, könnte hier eine vage Antwort geben.

Die geladenen Botenteilchen W^+ und W^- bewirken den radioaktiven Zerfall, zum Beispiel den **Beta-Zerfall**, wo ein Neutron spontan in ein Proton umgewandelt wird. Sie transportieren die überschüssige Ladung, die erst später in ein langlebiges Teilchen eingebracht wird (leider in ein Antiteilchen). Auffällig ist, dass das dritte Boson, das **neutrale Z^0** , bei keinem dieser Prozesse auftritt, wo z. B. überhaupt keine Ladung transportiert werden muss. Es sieht also so aus, als ob die Eigenschaft dafür fehlt, da es nicht ausreicht, einfach nur elektrisch neutral zu sein.



Elementarteilchen mit Spin Null

Alle Elementarteilchen haben einen Spin, die Fermionen **Spin $\frac{1}{2}$** , die Bosonen **Spin 1**, und das Graviton **Spin 2**. Der Spin ist eine rein quantentheoretische Eigenschaft, die in der realen Welt kein vergleichbares Beispiel kennt - am ehesten vergleichbar mit einer Rotation um die eigene Achse. Im folgenden Bild ist die Königs-Karte nach einer halben Drehung wieder normal orientiert (Spin 2), die Sieben nach einer vollständigen Drehung (Spin 1) und Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen erst nach einer Drehung von 720° .



Das **Higgs-Boson**, das der Materie Masse verleiht, hat als einziges Teilchen per Definition den **Spin Null**. Da dieses Teilchen zur Zeit aber noch sehr hypothetisch ist, ist auch diese Null fraglich.

Schwarze Löcher - die Zeit steht still

So wie die spezielle Relativitätstheorie, kennt auch die allgemeine Relativitätstheorie ein kleines **Zwillingsparadoxon**. Zwillinge fliegen in diesem Gedankenexperiment mit einem Raumschiff zu einem **Schwarzen Loch**, und einer von beiden steigt aus und stürzt in Richtung des **Ereignishorizontes** EH der Singularität. Die allgemeine Relativitätstheorie liefert bei entsprechender Ableitung zwei Lösungen:

Für den im Raumschiff zurückgebliebenen Beobachter eine Exponentialfunktion,

$$r\text{-EH} = (R\text{-EH}) \cdot e^{(-t / \text{EH})}$$

Der Abstand r zum Ereignishorizont wird also mit der Zeit immer geringer, aber erst bei $t = \infty$ wird der Abstand **null**. Für den Beobachter erscheint es, als ob der stürzende Zwilling ewig am Ereignishorizont verharret, also die Zeit stillsteht. Die Zeit ist eine Eigenschaft, die immer vorhanden, aber vom Beobachter aus gesehen Null ist.

Für den stürzenden Zwilling ergibt sich demgegenüber ein quasi-linearer Term,

$$t_E = \sqrt{\frac{R^3}{2m}} \arccos(0) = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R^3}{2m}}$$

Seine Eigenzeit bleibt unverändert. Er durchquert ungeniert den Ereignishorizont, und stürzt weiter in das Schwarze Loch! Seine Verweildauer wird allerdings nur kurz sein. Denn draußen ist mittlerweile alle Zeit vergangen, und das Schwarze Loch irgendwann verdampft. Er steht also plötzlich alleine da, ohne Zwillingspartner und ohne Universum.

Ein Schwarzes Loch ist mathematisch gesehen nur eine **Koordinaten-Singularität**, die man durch geschickte Wahl eines Koordinatensystems umgehen kann - was immer auch das für die Realität nun bedeuten mag. Die Vitalfunktionen eines Astronauten, der in ein Schwarzes Loch stürzt, würden jedenfalls jedem Mediziner größte Sorgen bereiten.

Rationale Zahlen

Brauchen wir rationale Zahlen, oder sind die nur ein terrestrischer Schmutzeffekt aufgrund unglücklich gewählter Maßeinheiten wie Meter, Sekunde und Kilogramm? Wenn das **Plancksche Wirkungsquant** als kleinste Maßeinheit gewählt wird, und alle Naturkonstanten entsprechend angepasst werden, sollte eigentlich alles in der Natur diskret mit natürlichen Zahlen abzählbar sein.

Ein nüchterner Blick auf die **Naturkonstanten** und ihr Größenvergleich zeigt das eigentliche Dilemma auf. Die Elementarladung e und die Gravitationskonstante g sind auf die tausendstel Dezimale genau definiert, und eine auch nur geringfügige Änderung wäre hier eine Katastrophe: Entweder gäbe es keine schweren Atome und chemische Bindungen, oder es gäbe keine langlebige bzw. energiereiche Sterne mit Planetensystemen. Demgegenüber zeigt der Vergleich der elektrischen und gravitativen Kraft einen Größenunterschied von 10^{39} .

Die **elektrische Kraft** ist also 1000 Milliarden Milliarden Milliarden Milliarden mal stärker als die **Massenanziehung**, und das auf die tausendstel Dezimale genau. Was hat sich der „große Uhrmacher“ des Universums dabei gedacht? Sicher nicht die Etablierung pragmatischer Maßeinheiten.

Aber unsere unergründliche Liebe zu Infinitesimalrechnungen und Betrachtung dynamischer Prozesse läßt uns vermutlich sowieso nicht auf Dezimalzahlen verzichten.

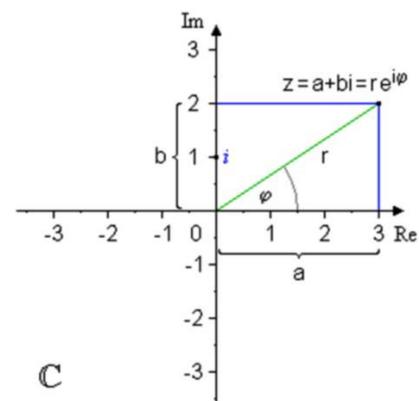
Irrationale Zahlen

Was ist mit den irrationalen Zahlen, wie zum Beispiel die **Wurzel aus 2**, **Pi** und **e**? Für die alten Griechen mit ihrem Idealismus war es eine Katastrophe, dass ein Quadrat mit Seitenlänge 1 kein rationales Ergebnis für die Diagonale aufwies. Auch die Kreiszahl π und die Eulersche Zahl e sind so fundamental und wichtig, dass früher oder später jede intelligent Zivilisation im Universum sie nutzt. Die Frage ist daher, haben all diese mathematischen Konstrukte einen effektiven **Realitätsbezug**, oder zählen sie eher zum **kulturellen Erbe** einer Zivilisation, so wie zum Beispiel der Goldene Schnitt?

Komplexe Zahlen

Was sind komplexe Zahlen? Lange Zeit galten sie nur als mathematische Spielerei. Dann hat sie die Naturwissenschaft, insbesondere aber die Elektrotechnik, als unverzichtbares Hilfsmittel für die Berechnung frequenzabhängiger Vorgänge entdeckt. Später haben sie, auf beinahe mystische Weise, Eingang in eine physikalische Gleichung gefunden – in die **Schrödinger Wellengleichung**, und damit in eine der fundamentalen Theorien der Quantenmechanik.

Was aber macht eine komplexe Zahl, konkret die **imaginäre Einheit i** , in einer physikalischen Gleichung? Also nicht als Hilfsmittel zur Berechnung, sondern als vitaler Bestandteil einer Naturbeschreibung. Die Schrödinger-Gleichung selbst ist ein Postulat, das heißt, sie wurde zwar von der klassischen Wellentheorie motiviert, kann aber nicht aus dieser abgeleitet werden. Dazu sind weitere, quantentheoretische, Ansätze erforderlich, die sich einem klassischen Naturverständnis entziehen. Auch das Ergebnis der Schrödinger-Gleichung ist nicht selbstverständlich, es ist eine Wahrscheinlichkeit, und keine physikalische Größe.



Ein bedeutender Physiker hat einmal den Ausspruch getätigt:

„Wer behauptet, die Quantentheorie verstanden zu haben, hat sie nicht verstanden!“

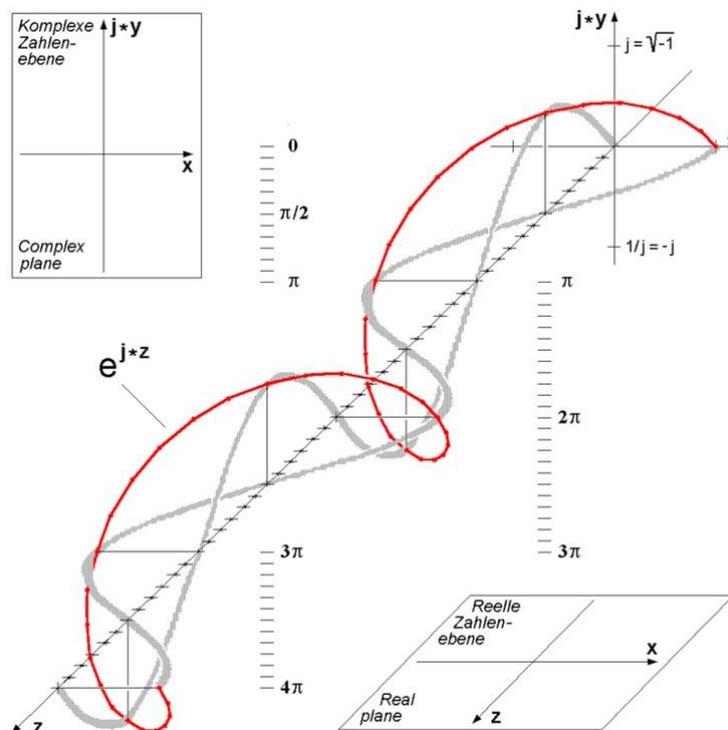
Beim Anblick der Schrödinger-Gleichung könnte man durchaus diesen Eindruck gewinnen. Aber es handelt sich dabei nur um eine „banale“ **partielle Ableitung** mit dem in der Physik üblichen Hamilton-Operator und der Plankschen Konstante h . Das eigentlich Geheimnisvolle ist das vermeintlich unscheinbare i .

Um zu verstehen, warum man nicht versteht, braucht man – schon wieder – etwas Phantasie. Komplexe Größen, die eine physikalische Realität besitzen, sind nicht einfach Punkte auf einer Funktionskurve, sondern Funktionen in der Zahlenebene. Sie entsprechen stehenden Wellen, die bereits zu einem einzigen Zeitpunkt periodisch und nach eigenen Gesetzmäßigkeiten ihren Wert ändern, sie **oszillieren**. Bringt man nun die Zeit mit ins Spiel, dann addieren sich diese Oszillationen zum eigentlichen Zeitablauf der physikalischen Funktion, und es entsteht, diesmal im sprichwörtlichen Sinne, eine sehr komplexe Funktion.

Die Schrödinger-Gleichung selbst ist streng deterministisch und liefert zu jedem Zeitpunkt ein Ergebnis, nämlich Wahrscheinlichkeiten für bestimmten Werte. Das Ergebnis - also eine Messung - liefert nur eine von vielen möglichen Werten zu diesem Zeitpunkt („Gott würfelt“).

Lässt man die komplexen Größen weg, wäre unsere Welt ganz einfach. Sie würde eine gedämpfte Schwingung ausführen, ausklingen und wäre dann weg.

Die nachfolgende 3D-Darstellung der **Eulerformel** mit ihren Imaginär- und Realteilen liefert einen vagen Eindruck über das „komplexe“ Verhalten von komplexen Zahlen.



Links

<https://de.wikipedia.org/wiki/Mannigfaltigkeit>
https://de.wikipedia.org/wiki/Kleinsche_Flasche

https://de.wikipedia.org/wiki/Irrationale_Zahl
https://de.wikipedia.org/wiki/Eulersche_Zahl
https://de.wikipedia.org/wiki/Eulersche_Formel
https://de.wikipedia.org/wiki/Komplexe_Zahl
<https://de.wikipedia.org/wiki/Exponentialfunktion>
<https://de.wikipedia.org/wiki/Nullvektor>

The life-changing love of one of the 20th century's greatest physicists
<https://theconversation.com/the-life-changing-love-of-one-of-the-20th-centurys-greatest-physicists-51229>
<https://de.wikipedia.org/wiki/Dirac-Gleichung>
<https://de.wikipedia.org/wiki/Dirac-See>
<https://de.wikipedia.org/wiki/Feynman-Stueckelberg-Interpretation>
<https://www.weltderphysik.de/gebiet/teilchen/bausteine/neutrinos/neutrinooszillationen/>
https://www.lsw.uni-heidelberg.de/users/mcamenzi/HD_SolareNeutrinos.pdf

https://de.wikipedia.org/wiki/Elektrische_Ladung
https://de.wikipedia.org/wiki/Elektrisches_Feld
https://de.wikipedia.org/wiki/Nahwirkung_und_Fernwirkung

https://de.wikipedia.org/wiki/Feinabstimmung_der_Naturkonstanten
https://de.wikipedia.org/wiki/Elektroschwache_Wechselwirkung
https://elearning.physik.uni-frankfurt.de/data/FB13-PhysikOnline/lm_data/lm_282/auto/kap15/cd50801.htm

<https://de.wikipedia.org/wiki/Elementarteilchen>
<https://de.wikipedia.org/wiki/Teilchen>
https://de.wikipedia.org/wiki/Fundamentale_Wechselwirkung
<https://de.wikipedia.org/wiki/Stringtheorie>
<https://de.wikipedia.org/wiki/Vakuumfluktuation>
https://de.wikipedia.org/wiki/Virtuelles_Teilchen
https://de.wikipedia.org/wiki/Erzeugungs-_und_Vernichtungsoperator
<https://de.wikipedia.org/wiki/Betastrahlung>
<https://de.wikipedia.org/wiki/Protonenzerfall>

<https://de.wikipedia.org/wiki/Wellengleichung>
<http://theory.gsi.de/~vanhees/faq-pdf/Wellengleichung.pdf>
<https://de.wikipedia.org/wiki/Wellenfunktion>
<https://de.wikipedia.org/wiki/Schrodingergleichung>
[https://de.wikipedia.org/wiki/Harmonischer_Oszillator_\(Quantenmechanik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Harmonischer_Oszillator_(Quantenmechanik))
<https://de.wikipedia.org/wiki/Hamiltonoperator>
<https://de.wikipedia.org/wiki/Hamilton-Funktion>
<https://de.wikipedia.org/wiki/Hilbertraum>
https://de.wikipedia.org/wiki/Zweite_Quantisierung

<http://mathworld.wolfram.com/topics/>
<http://mathworld.wolfram.com/ComplexExponentiation.html>

Die fünf großen Demütigungen

In seiner Arbeit „Eine Schwierigkeit der Psychoanalyse“ aus dem Jahre 1917 stellt Freud die Widerstände dar, die der von ihm entwickelten Psychoanalyse seiner Auffassung nach entgegenstehen. Wie jede wissenschaftliche Neuerung müsse sie sich gegen das etablierte Denken durchsetzen, und es besteht die Gefahr, dass starke Gefühle der Menschheit verletzt werden. Freud nennt drei große Demütigungen, die der naive Narzissmus des menschlichen Bewusstseins durch wissenschaftliche Erkenntnisse erlitten hat:

1. Die kosmologische Demütigung

Die Erde ist nicht Mittelpunkt des Weltalls (Kopernikanische Wende)

2. Die biologische Demütigung

Der Mensch stammt vom Affen ab (Charles Darwin)

3. Die psychologische Demütigung

Der Mensch ist nicht Herr im eigenen Haus (Sigmund Freud),
das Seelenleben entzieht sich der Kenntnis und Herrschaft des bewußten Willen.

Eine **aktuelle Adaptierung** erweitert die Liste um zwei weitere Demütigungen

4. Die kognitive Demütigung

Der Mensch ist aufgrund seiner physiologischen Eigenschaften nicht fähig, die Welt so wahrzunehmen, wie sie ist.

- Relativierung von Raum und Zeit durch die Relativitätstheorie!
- „Gott würfeln nicht?\": Verlust von Realität und Kausalität durch die Quantentheorie!
- Kollaps der Wellenfunktion: Intelligenter Beobachter oder Dekohärenz?
- Suche nach einer umfassenden Theorie, die alles beschreibt (Theory of Everything TOE)
- Nur die Mathematik kann den Mikrokosmos (Quantenwelt) und Makrokosmos (Universum) ausreichend beschreiben?

5. Die anthropische Demütigung

Der Mensch ist nur eine Vorstufe intelligenten Lebens. Die Zukunft gehört der Künstlichen Intelligenz (KI), die sich rein teleologisch, also zweckorientiert, ohne Bedarf an Krieg, Ausbeutung und Hegemonie weiterentwickelt. Ob Religion, Kunst und Kultur dabei Bestand haben, ist fraglich.

- Das „Egoistische Gen“ von Richard Dawkin stellt die sozialen, moralischen und altruistischen Denk- und Verhaltensweisen der Menschen in Frage.
- Der Physiker Stephen Hawking zählt die Erde zu den potentiellen Kandidaten für die Entwicklung intelligenten Lebens, ist aber skeptisch, ob die Menschen dies schaffen.

Auf dem Weg zu einer galaktischen Zivilisation der Stufe I, die ihren Planeten nachhaltig beherrscht, haben wir knapp 70% erreicht. Eine Zivilisation der Stufe II beherrscht das eigene Sonnensystem, und eine Stufe III die eigene Galaxis.

Eine Reise zum Mars dauert mit unserer gegenwärtigen Raketentechnik 9 Monate (mit Rückreise knapp 3 Jahre), und zum nächsten Stern 50.000 Jahre. Kolonisten müssten daher auf einer Reise zu einem extrasolaren Planeten viele Generationen in einem Raumschiff leben und überleben. Niemand würde vermutlich solche für ihn profitlose Expeditionen finanzieren.

Anthropisches Prinzip

Ob Gott den Menschen nach seinem Ebenbild geschaffen hat (Kreationismus), oder ob Gott das Universum so geschaffen hat, dass zwingend intelligente Zivilisationen entstehen müssen (Evolution), ist eine sekundäre Frage. Wichtiger ist die Frage nach der Bedeutung des Menschen bzw. eines intelligenten Beobachters im Universum.

- Das „**schwache anthropische Prinzip (WAP)**“ konstatiert eigentlich nur lakonisch, dass alle „Zufälligkeiten“ im Universum dazu geführt haben, dass intelligentes Leben entstehen konnte, da wir sonst das Universum nicht betrachten könnten.
- Das „**starke anthropische Prinzip (SAP)**“ fordert zwingend die Entstehung intelligenten Lebens, damit das unvorstellbar überdimensionierte Universum Sinn macht, bzw. damit Gott durch einen Beobachter erkannt und damit Realität wird.
- Das „**finale anthropische Prinzip (FAP)**“ fordert, dass Intelligenz im Universum entstehen und fortbestehen muss. Die Geschichte des Universums muss also für alle Zeiten erhalten bleiben. Entweder durch ein allwissendes Archiv im kommenden Paradies, oder durch die vielfältige Topologie der hochdimensionalen Strings (10^{500}), oder durch die am „Ereignishorizont“ des Universums gespeicherte Entropie?

Milchmädchenrechnung:

Das Universum existiert seit 15 Milliarden Jahren, das sind

$$10^{10} * (365 * 24 * 3600) = 10^{10} * 3 * 10^7 = 3 * 10^{17} \text{ Sekunden,}$$

und enthält 10^{90} stabile Elementarteilchen (Elektronen und Protonen), das wären also 10^{107} mögliche Ereignisse pro Sekunde

Auch wenn man z. B. Nanosekunden vorsieht, und eine Million unterschiedlicher Ereignisse, würde das erst 10^{122} Speicherplätze erfordern, um die Geschichte jedes Elementarteilchens zu dokumentieren.

https://en.wikipedia.org/wiki/Mediocrity_principle

https://en.wikipedia.org/wiki/Rare_Earth_hypothesis

https://en.wikipedia.org/wiki/Bayes'_theorem